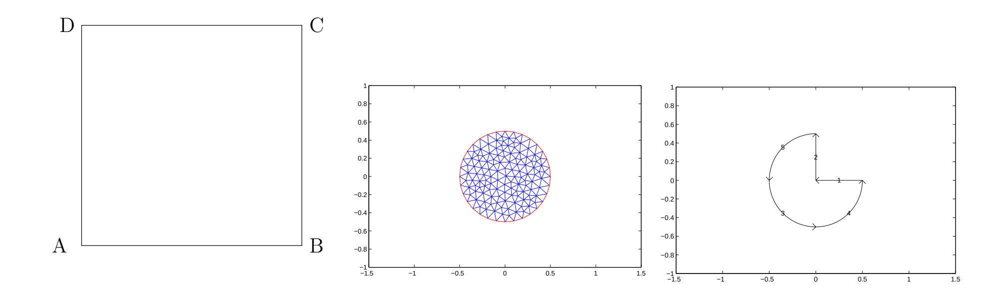
ESCPI / GM3 - Second Cycle **2007-2008**

MATHÉMATIQUES et MÉTHODES NUMERIQUES

T.P. 1

Premiers pas

1) Résoudre le problème du Laplacien avec conditions de Dirichlet et Neumann dans le cas des géométries ci-dessous Précisément, on considère successivement les



problèmes

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{puis} \quad \Delta u = 1 \quad \text{pour tout point} \quad (x,y) \in \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad AB, \quad u = 1 \quad \text{sur} \quad CD \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad BC \cup AD \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 1 \quad (x,y) \in \Omega \text{ (disque)} \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 1 \quad (x,y) \in \Omega \text{ (disque tronqué)} \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 1 \quad (x,y) \in \Omega \text{ (disque tronqué)} \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \end{cases} \tag{4}$$

2) Calculer les modes propres du laplacien pour un carré, un disque, un rectangle, etc en variant les conditions aux limites.

3) Résoudre le problème

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta u = 0 \quad \text{pour tout point} \quad (x,y) \in \Omega \\ u = T_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + c(u - T_e) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\end{array}\right. \tag{5}$$

On suppose :

$$T_i = 100, \quad T_e = 20, \quad c = 1$$

Tester d'autres types de conditions aux limites.

4) La température extérieure T_e est toujours supposée fixée. Calculer la température T_i nécessaire pour obtenir une valeur donnée Q_0 du flux Q_h échangé avec l'extérieur à travers le bord supérieur du domaine.

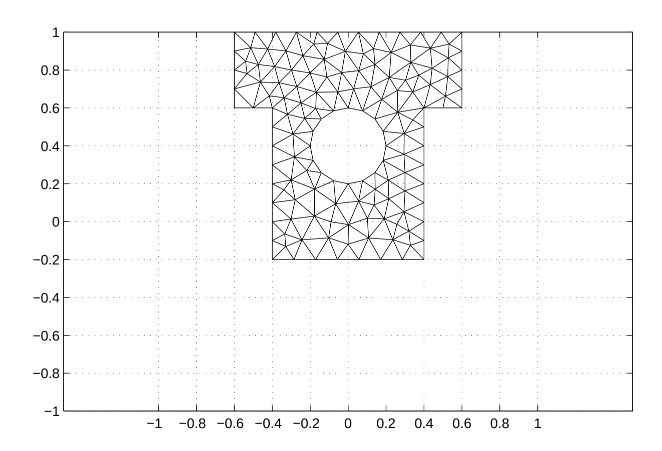


FIG. 1 – Géométrie et maillage du problème

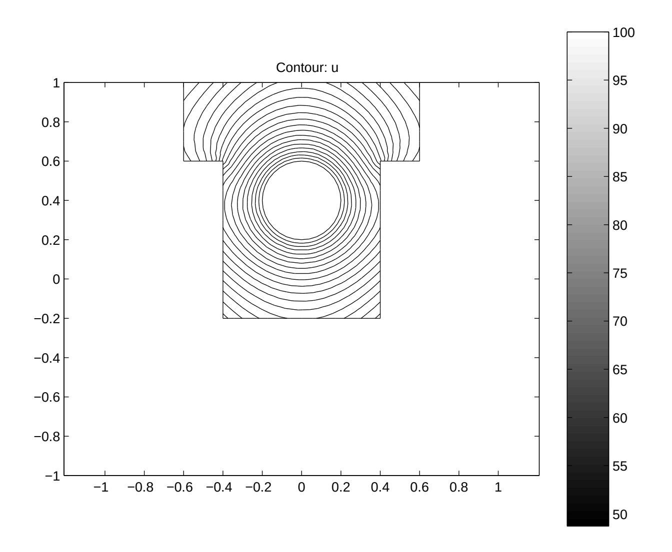


FIG. 2 – Isothermes de la solution du problème

TP2

Le but de ce TP2, ainsi que du TP 3 qui le suivra, est de présenter l'utilisation d'un outil de calcul comme aide à la modélisation. Il s'agit du calcul du champ de température dans un moule de thermoformage de plastique. Ce TP est issu d'un vrai problème posé par Renault pour l'optimisation de moules qui étaient utilisés pour le thermoformage de pare-chocs ou "boucliers". Le problème technologique est le suivant : les pare-chocs doivent être cuits à une température uniforme de 150 degrés. Comment chauffer les moules ?

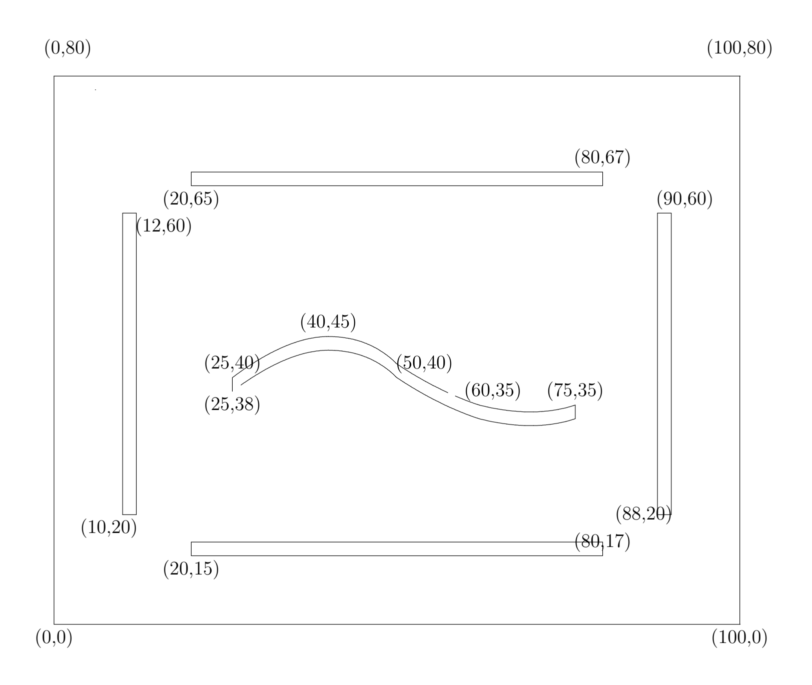


Fig. 3 – Moule de thermoformage : données géométriques

La situation initiale

Initialement, les moules étaient chauffés par un liquide maintenu à une température de 150 degrés circulant dans des canaux à l'intérieur du moule en acier. Le moule réel est modélisé, pour simplifier dans le cadre de ce TP par un modèle en dimension deux représentant, très approximativement, une section verticale du moule réel. On considère donc le domaine Ω représentant une section plane d'un moule chauffant pour thermoformage de plastique (Figure 1) dont on cherche à calculer la répartition de température.

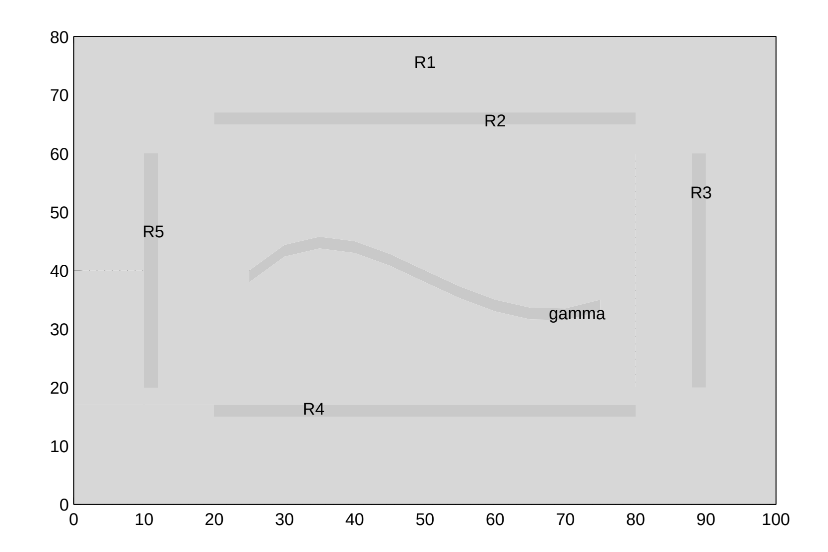


Fig. 4 – Moule de thermoformage

On suppose, tout d'abord, le moule chauffé par le liquide circulant dans des canaux dont on a représenté les 4 sections, maintenu à une température de 20 degrés sur son bord inférieur Γ_1, de 50 degrés sur son bord supérieur Γ_2 et isolée thermiquement sur ses bords latéraux Γ_0. Le liquide chaud est ici supposé échanger parfaitement sa température avec les parois en acier du moule.
Soit $u(x, y)$ la température en un point x, y de Ω. La modélisation de ce problème s'écrit

$$\begin{cases} -k\,\Delta u\,(x,y) = f \qquad \text{dans } \Omega \\ u = 150 \qquad \text{sur le contour des 4 canaux} R2, R3, R4, R5 \\ u = 20 \qquad \text{sur } \Gamma_1 \\ u = 50 \qquad \text{sur } \Gamma_2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

avec $k = 50\,W/K, f = 0\,W/m^2$

Question 1

Rappeler la formulation variationnelle de ce problème sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u} \text{ appartenant à } V \text{ telle que :} \\ a(\tilde{u}, v) = l(v) \quad \forall\, v \in V \end{cases}$$

en précisant l'espace V choisi et les formes a et l.

Question 2

Résoudre ce problème en utilisant la toolbox pdetool de Matlab (éléments finis P1). La géométrie exacte du moule et du profil γ du parechoc seront précisés en séance de TP. La géométrie du profil γ sera introduite grace à une spline. On tracera, en sortie, la courbe des températures obtenues sur γ.

Question 3

On considère dans une nouvelle approche que les conditions aux limites sur les frontières extérieures Γ_0 et Γ_2 modélisent un échange convectif selon

$$-k\frac{\partial u}{\partial n} = h(u-20)$$

où 20 est donc la température de l'air ambiant et $h = 5$ le coefficient de convection. Reprendre les questions précédentes et résoudre avec MATLAB dans ce nouveau cas.

La situation actuelle

Le chauffage par un liquide a été abandonné au profit d'un chauffage du moule par des résistances électriques. Ceci change fondamentalement le modèle. Les canaux contenant les résistances font maintenant partie du domaine de calcul. Les résistances sont modélisés par des zones où une puissance est apportée, ce qui se modélise par des valeurs non-nulles du second membre f de l'équation. On suppose donc maintenant le moule chauffé par 4 résistances électriques et maintenu à une température de 20 degrés sur son bord inférieur Γ_1, de 50 degrés sur son bord supérieur Γ_2 et isolée thermiquement sur ses bords latéraux Γ_0. La modélisation de ce problème s'écrit

$$\begin{cases} -k\Delta u\,(x,y) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 20 & \text{sur } \Gamma_1 \\ u = 50 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

avec

$k = 50$ $\quad f = 0$ sur Ω $\quad f = 250$ sur $R2$ et $R4$ $\quad f = 50$ sur $R3$ et $R5$

Question 4

Donner la nouvelle formulation variationnelle de ce problème.

Question 5

Résoudre ce nouveau problème en utilisant la toolbox pdetool de Matlab

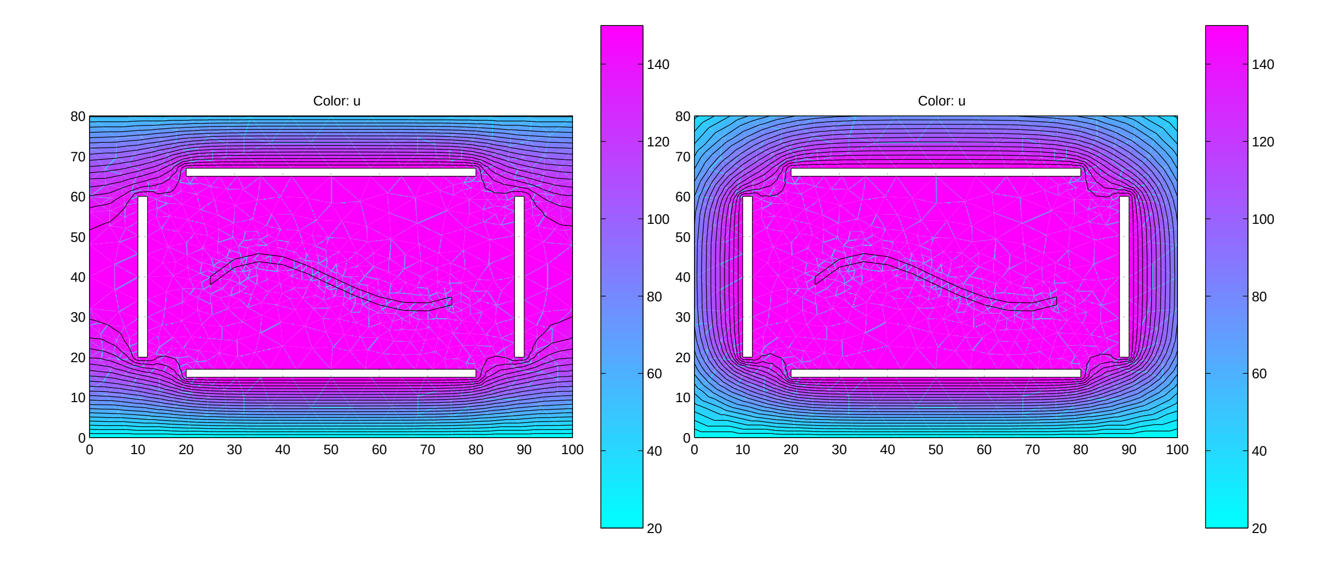


FIG. 5 – Températures avec le chauffage par liquide et les deux types de conditions aux limites

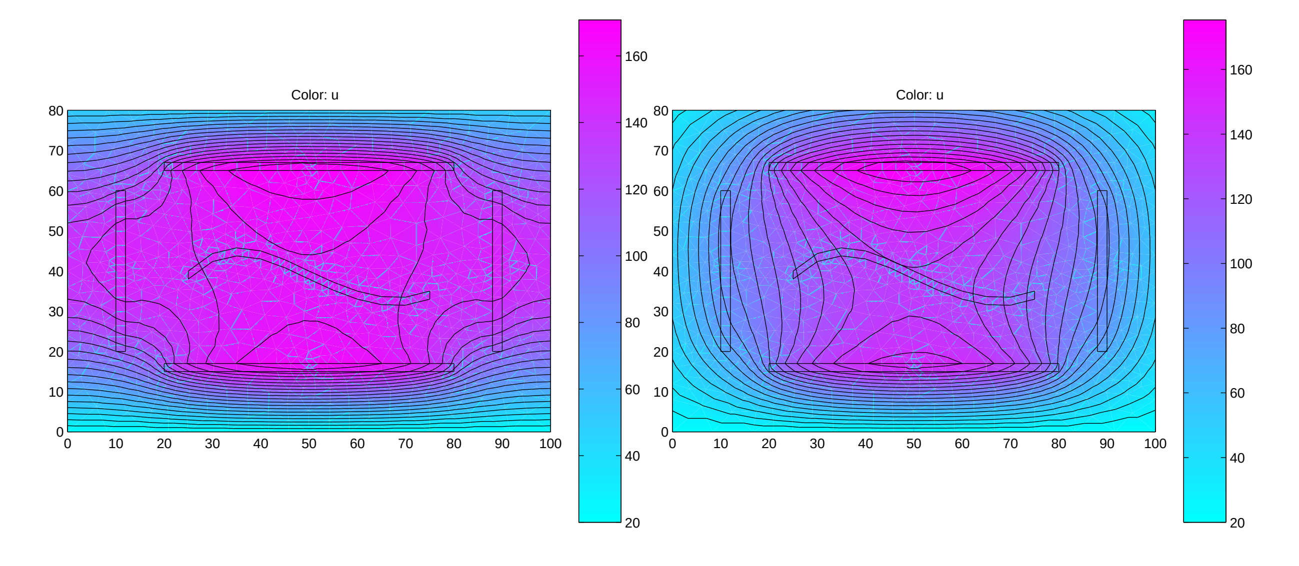


FIG. 6 – Températures avec le chauffage par résistances et les deux types de conditions aux limites

Question 6

Mêmes questions dans le cas d'un échange convectif avec le milieu extérieur selon

$$-k\frac{\partial u}{\partial n} = h(u-20)$$

où 20 est donc la température de l'air ambiant et $h = 5$ le coefficient de convection.

TP3

Le but de ce TP est la résolution d'un problème d'optimisation. On dit aussi problème inverse. C'est le vrai problème de conception pour un ingénieur. Une fois que l'on est assuré de savoir modéliser et calculer la solution du problème à partir des données géométriques et physiques, on peut envisager le problème plus intéressant mais plus difficile suivant : Quelles sont les données qu'il faut choisir pour obtenir un résultat prescrit.

Dans notre problème de moule chauffant, la question est : quelles valeurs de puissances doit-on donner aux résistances électriques pour obtenir sur le pare-choc γ une température homogène de 150 degrés. Voici la méthode : on doit écrire un programme d'optimisation par une méthode de moindres carrés déterminant les valeurs à donner aux puissances f dans les 4 résistances $R2$, $R3$, $R4$, $R5$ pour obtenir la température la plus proche possible de 150 degrés sur le profil γ.

Ce problème devra être résolu à l'aide de la toolbox pde de Matlab.

TP4 : Ecoulement potentiel

Tuyère

Résoudre avec la toolbox pdetool de Matlab le problème potentiel suivant : On

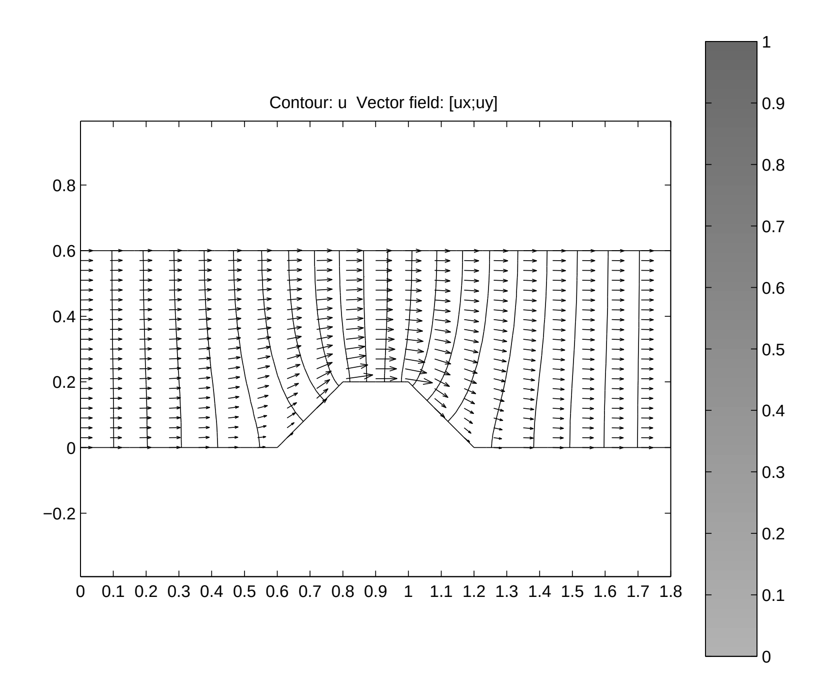


Fig. 7 – Ecoulement potentiel dans une tuyère

cherche le champ de vitesses sous la forme du gradient d'une fonction potentiel ϕ solution du problème :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver une fonction } \phi \text{ définie sur } \Omega \text{ telle que :} \\ -\Delta\,\phi = 0 \qquad \text{pour} \qquad (x,y) \in \Omega \\ \phi = 0 \qquad \text{sur } AH, \qquad \phi = 1 \qquad \text{sur } FG \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } ABCDEF, \qquad \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } HG \end{array}\right. \tag{6}$$

Interpréter les conditions aux limites et résoudre avec Matlab.

Modéliser et résoudre, avec la toolbox pdetool de Matlab, le même problème en fonction de courant. Cette fois

$$V = (\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x})$$

Ecoulement non-portant autour d'un profil NACA

Potentiel

Résoudre le même problème en fonction potentiel puis en fonction de courant pour un écoulement en fluide parfait autour d'un profil d'aile donné.

```
function y=naca(x);
 t1=0.1775*sqrt(x);
 t2=-0.075597*x;
 t3=-0.212836*x.^2;
 t4=0.17363*x.^3;
 t5=-0.06254*x.^4;
y=t1+t2+t3+t4+t5;
```

On pourra étudier l'effet du maillage et du confinement (dimension de la boîte sur la qualité des résultats

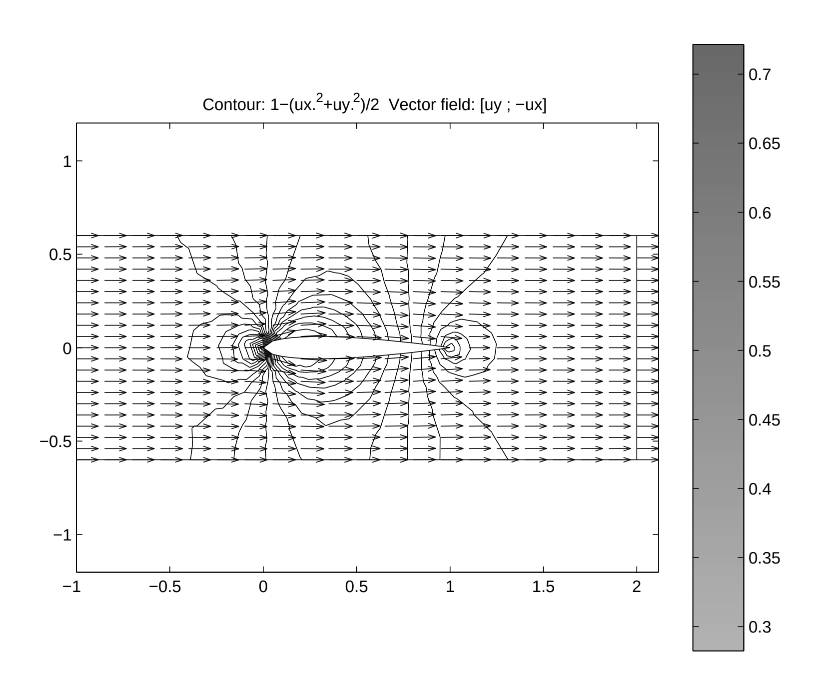


Fig. 8 – Ecoulement potentiel

Ecoulement portant autour d'un profil NACA

On suppose maintenant le profil portant suivant. Déterminer la condition aux limites pour la fonction de courant ψ sur le profil d'aile telle que l'écoulement vérifie

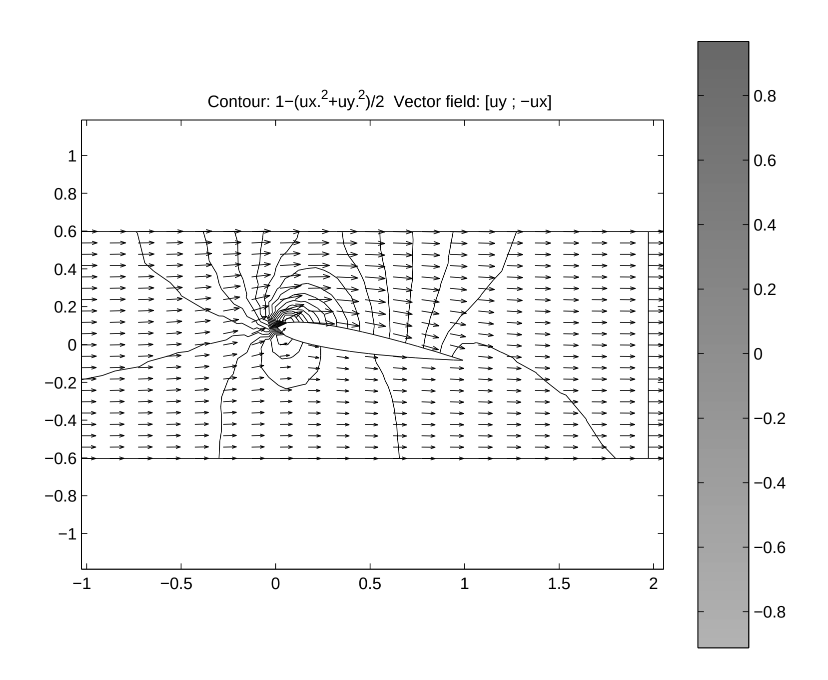


FIG. 9 – Ecoulement portant

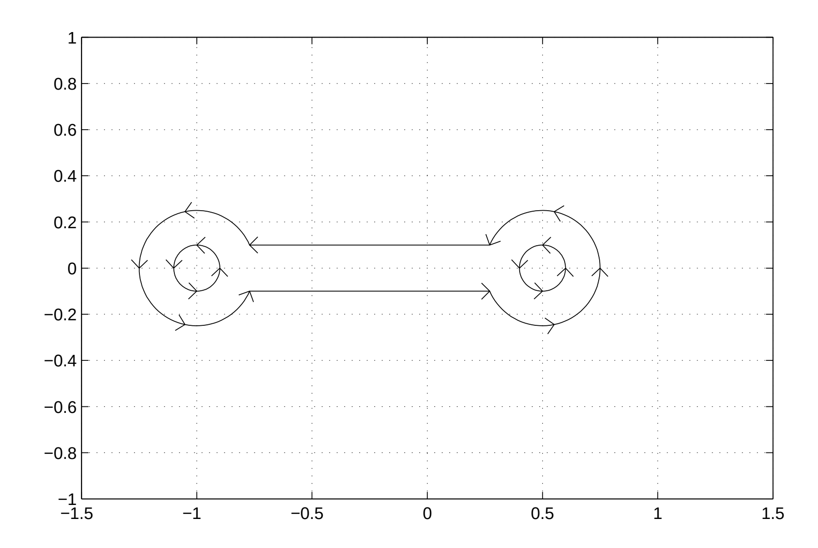
la condition de Kutta-Joukovski d'égalité des pressions supérieure et inférieure au bord de fuite.

Indication La pdetool de Matlab permet de récupérer les gradients (constants par triangle) de la solution par la fonction **pdecgrad**.

Mode d'emploi : [cgxu,cgyu] = pdecgrad(p,t,c,u) renvoie les 2 composantes des gradients dans chaque triangle du maillage.

TP5

Bielle avec congé



1) Réaliser la géométrie de la bielle et résoudre un problème en contraintes planes associé.

2) Déterminer une nouvelle géométrie afin d'introduire les congés nécessaires en utilisant la fonction spline de Matlab.

Ecoulement portant autour d'un biplan en double profil NACA

On propose ici l'extension du calcul d'écoulement portant du TP4 au cas d'un biplan constitué de deux profils naca superposés.

Déterminer les conditions aux limites pour la fonction de courant ψ sur les profils d'ailes telles que l'écoulement vérifie la condition de Kutta-Joukovski d'égalité des pressions supérieure et inférieure aux bords de fuite.

Indication La pdetool de Matlab permet de récupérer les gradients (constants par triangle) de la solution par la fonction **pdecgrad**.

Mode d'emploi : [cgxu,cgyu] = pdecgrad(p,t,c,u) renvoie les 2 composantes des gradients dans chaque triangle du maillage.

On pourra étudier l'effet du maillage et du confinement (dimension de la boîte sur la qualité des résultats

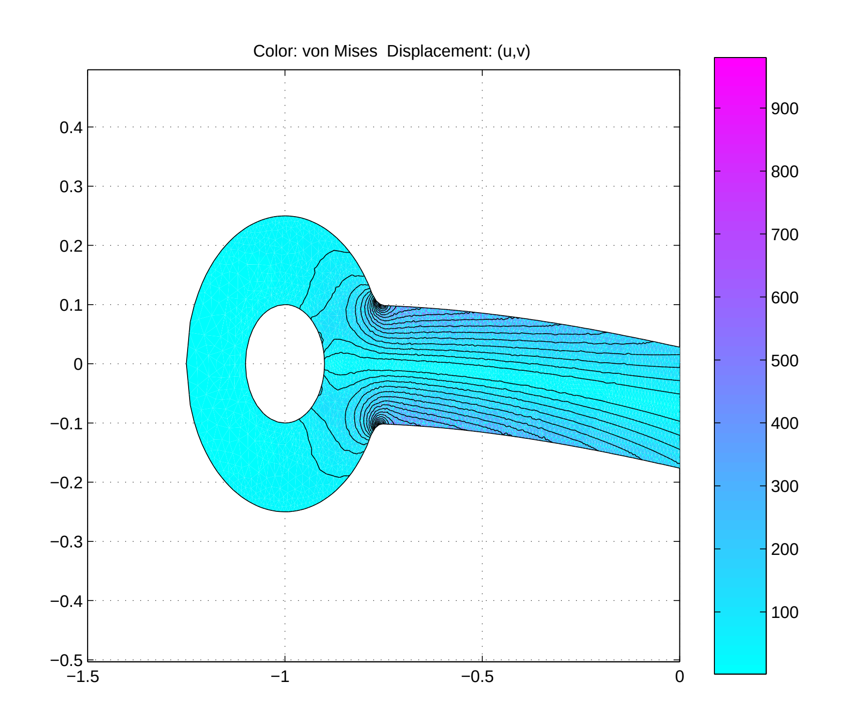


FIG. 10 – Contraintes de Von Mises sur la bielle avec congé

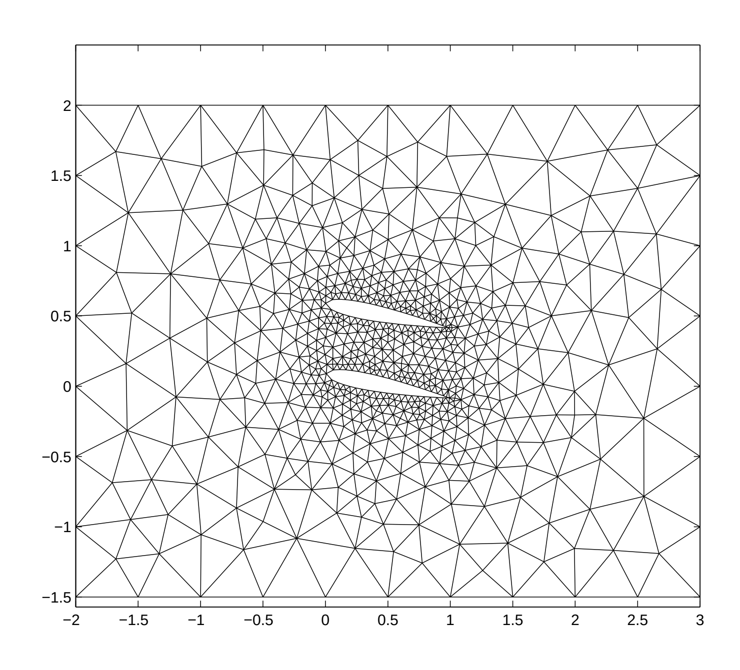


FIG. 11 – Maillage du domaine pour le biplan

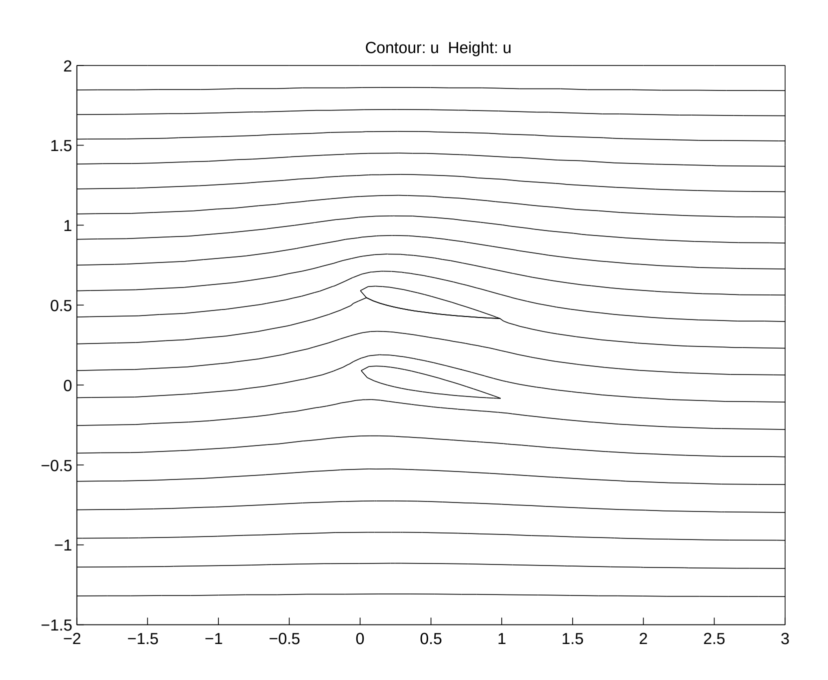


Fig. 12 – Ecoulement portant autour du biplan